



TITLE:

不連続な微分係数をもつ微分方程式系に対する陽的 $s$ 段 $p$ 次  
Runge-Kutta法の数値的安定性について (偏微分方程式の数値解法とその周辺II)

AUTHOR(S):

鈴木, 千里; 幸谷, 智紀; 満田, 賢一郎

---

CITATION:

鈴木, 千里 ...[et al]. 不連続な微分係数をもつ微分方程式系に対する陽的 $s$ 段 $p$ 次  
Runge-Kutta法の数値的安定性について (偏微分方程式の数値解法とその周辺II). 数理解  
析研究所講究録 2001, 1198: 72-78

ISSUE DATE:

2001-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/64900>

RIGHT:

# 不連続な微分係数をもつ微分方程式系に対する 陽的 $s$ 段 $p$ 次 Runge-Kutta 法の数値的安定性について

静岡理工科大学 鈴木 千里 (Chisato Suzuki)

静岡理工科大学 幸谷 智紀 (Tomonori Kouya)

システム計画研究所 満田賢一郎 (Ken-ichirou Mitsuda)

## 1 はじめに

不連続な微分係数をもつ遅延型の常微分方程式系の初期値問題

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y([t]), \dots, y([t-r])) \\ y(j) = c_j, (j=0, -1, \dots, -r), (t \geq 0) \end{cases}$$

に  $s$  段  $p$  次 Runge-Kutta 公式を適用する際の数値的安定性と少しではあるが数値的な精度について考察する. ここで  $r \geq 0$  は整数であり,  $[t]$  は  $t$  を越えない最大の整数値を取るようなガウス括弧である. この問題における方程式を DDED (Delay Differential Equation with Discontinuity) とよび, その解についてはつぎのように定義する.

**定義 1.1** 区間  $[0, \infty)$  上で定義されたつぎの条件を満たすような連続関数  $y(t)$  を問題 (1) の解という.  $n \geq 0$  を整数として

- (a) 各区間  $(n, n+1)$  上で微分可能
- (b)  $t=n$  上で右微分可能
- (c) 各区間  $[n, n+1)$  上で DDED を満たす. ■

DDED の初期問題の解をこのように定義することによって, 滑らかな  $f(t, y, z_1, \dots, z_r)$  に対して, その解の一意的な存在を証明することができる. この証明は通常の常微分方程式の解の存在定理と同様にして行うことができる. DDED の解は定義区間全体で連続ではあるが連続微分可能ではない. (例えば, 図1参照)

DDED にはつぎのような応用が期待される.

1. 化学プラントにおける化学反応の制御モデル

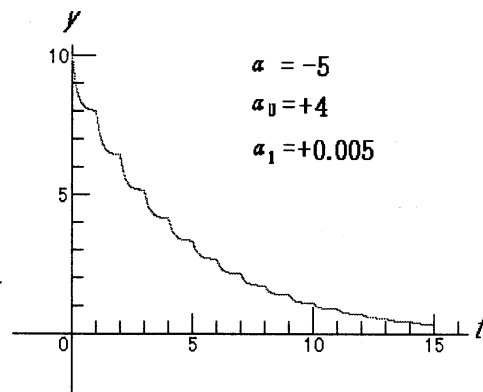


図 1:  $y'(t)=ay(t)+a_0y([t])+a_{-1}y([t-1])$  の解 ( $y(0)=10, y(-1)=1$ )

への応用:

$$y'(t)=H(t, y(t)) + G(t, y([t])), (t \in [n, n+1))$$

ここで  $H$  は時刻  $t$  における化学反応速度,  $G$  は時刻  $[t]$  における原材料の供給

2. 生物学における Logistic Equation への応用:

$$y'(t)=ay(t)(1-y([t]))$$

ここで  $y(t)$  は時刻  $t$  における  $n$  代目の挙動,  $y([t])$  は  $n-1$  代目の影響. これは限定母集団の少数世代交代に適合する.

3. 経済学における景気循環モデル (Kalecki のモデル) への応用:

$$K' = \frac{a}{\theta} K(t) + (b - \frac{c}{\theta}) K([t-\theta])$$

ここで  $K$  は資本ストックを表し, 特に年度予算型の中短期動向解析に適する.

4. 数値解析における応用として, 例えば  $y'=f(y)$  に対して

$$y' = f\left(\left[\frac{t}{h}\right]h\right)$$

は Euler 法  $y_{n+1}=y_n+h f(y_n)$  の連続版である. すなわち, 離散解の連続化への応用などがある.

## 2 RK 法の制限

常微分方程式系  $y'=f(t, y(t))$  に対する ( $s$  段  $p$  次) Runge-Kutta (RK) 公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s w_i k_i, & (n \geq 0) \\ \begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_i = f(t_n + \alpha_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), & (2 \leq i \leq s) \end{cases} \end{cases}$$

を DDED に適用するに際しては若干の注意が必要である. ここで  $h$  は積分刻み幅である. 一般に DDED が整数点  $t=n$  上で不連続となることから,  $n$  から  $n+1$  の計算において,  $t_{n+1}$  点での解の導関数を使えない. したがって, この制約から適用可能な RK 公式は

$$0 \leq \alpha_i < 1, \quad (i=2, \dots, s)$$

を満たすものに限られる. 十分なサーベイを行った分けではないが, このような条件を満たす RK 法としては 1 段 1 次の Euler 法, 2 段 2 次の修正 Euler 法, 最適化 RK 法, 3 段 3 次の Heun 法, NyStröm 法, Ralston 法および 5 段 4 次の Scraton 法に限られる [1].

適用可能な高精度な RK 法については今後の開発が期待される.

## 3 LDDDED の特性

DDED に対する RK 法の安定性の解析には, つぎの線形 DDED (LDDDED) の初期値問題を用いる.

$$(2) \quad \begin{cases} y'(t) = Ay(t) + \sum_{i=0}^r A_i y([t-i]), & (t \geq 0) \\ y(j) = \hat{c}_j, & (j=0, -1, \dots, -r) \end{cases}$$

ここで  $y \in \mathbb{R}^d$  とし,  $A, A_i (i=0, \dots, r)$  は  $d \times d$  の複素定係数行列とする. 以下では, この初期値問題をテスト問題とよび, LDDDED をテスト方程式という. テスト問題とその解の基本的な性質の幾つかを以下に整理する.

**定理 3.1** [2]  $A$  が正則なら, テスト問題は一意の連続な解をもち, その解は各区間  $[n, n+1)$  において

$$y_n(t) = e^{A(t-n)} + (e^{A(t-n)} - I)A^{-1} \sum_{i=0}^r A_i c_{n-i}$$

によって与えられる. ここで  $I$  は単位行列であり, 係数  $\{c_n\}$  は  $c_0 = \hat{c}_0, \dots, c_{-r} = \hat{c}_{-r}$  を初期値にもつ, つぎの  $r$  階線形差分方程式の解である.

$$c_{n+1} = \sum_{i=0}^r B_i c_{n-i}$$

ただし

$$B_0 = e^A + (e^A - I)A^{-1}A_0$$

$$B_i = (e^A - I)A^{-1}A_i, \quad (1 \leq i \leq r) \quad \blacksquare$$

**定義 3.1** 任意の初期値に対してテスト問題の解  $y$  が  $y(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$  満たすとき, テスト方程式 (LDDDED) は漸近安定であるという.  $\blacksquare$

**定理 3.2** 正則な係数行列  $A$  をもつテスト方程式が漸近安定であるための必要十分条件は定理 3.1 の差分方程式の特性多項式

$$\rho(z) = \det \left( z^{r+1}I - (e^A - I)A^{-1}Q_r(z) - z^r e^A \right)$$

の根がすべて単位開円板  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  に属することである. ここで

$$Q_r(z) = \sum_{q=0}^r A_q z^{r-q} \quad \blacksquare$$

この定理から LDDDED が漸近安定であるための必要十分条件を容易に導出することができる. 例えば, 実係数をもつ LDDDED  $y'(t) = ay(t) + a_0 y([t])$  が漸近安定であるための必要十分条件は  $a, a_0$  が

$$-\frac{a(e^a+1)}{e^a-1} < a_0 < -a$$

を満たすことである. この条件を満たすような  $a-a_0$  平面上の領域が安定領域として図 1 に示される. ま

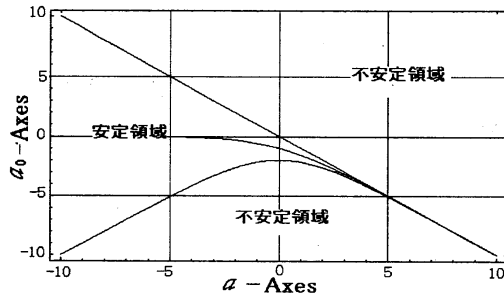


図 2:  $y'(t) = ay(t) + a_0y([t])$  の漸近安定領域

た, 実係数をもつ LDDED

$$y'(t) = ay(t) + a_0y([t]) + a_1y([t-1])$$

が漸近安定であるための必要十分条件は  $a, a_0, a_1$  が

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(e^a+1)}{e^a-1}\right) > 0$$

を満たすことである.

つぎに  $R_r(w) = Q_r(1/w)$  として行列  $M(w)$  を

$$(3) \quad M(w) = I - (e^A - I)A^{-1}R_r(w)w - e^Aw$$

と定義し, 多項式  $\rho^c$  を

$$\rho^c(w) = \det M(w), \quad (w \in \mathbb{C})$$

と定義する. このとき  $\rho^c(w) = w^{d \times (r+1)} \rho(1/w)$  が成立することから, つぎの補題は明らかである.

**補題 3.1** つぎの 3 つの命題は等価である.

- (1)  $\rho(z)$  の根が全て  $D$  に含まれる.
- (2)  $\rho^c(w)$  のいかなる根も  $D$  に属さない.
- (3) 行列  $M(w)$  ( $w \in D$ ) は正則である. ■

## 4 RK 法の適用

DDDED に RK 法を適用するに際して, 離散化点  $t_n$  が整数点に乗るよう取る必要がある. そこで積分刻み幅は  $h = 1/m$  ( $m \geq 1$ ) のように取る. このとき離散化点を  $t_{n,k} = n + kh$  ( $n \geq 0, 0 \leq k \leq m-1$ ) のように表すことにして, 解  $y(t_{n,i})$  の近似値を  $y_{n,i}$

で表すことにする. この表記のもとで, テスト方程式への  $s$  段  $p$  次 RK 公式の適用は

$$\begin{cases} y_{n,k+1} = y_{n,k} + h \sum_{i=1}^s w_i k_i \\ k_1 = Ay_{n,k} + \sum_{q=0}^r A_q y_{n-k,q,0} \\ k_i = Ay_{n,k} + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} A k_j \\ \quad + \sum_{q=0}^r A_q y_{n-k,q,0}, \quad (2 \leq i \leq s) \end{cases}$$

を導く. このとき  $k_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) について, つぎのようなベクトル表現を与えておくことと便利である.

$$(4) \quad \begin{pmatrix} T_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ T_{s,1} & \cdots & T_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay_{n,k} + d_n \\ \vdots \\ Ay_{n,k} + d_n \end{pmatrix}$$

ここで

$$d_n = \sum_{q=0}^r A_q y_{n-k,q,0}$$

また  $T_{ij}$  ( $i \geq j$ ) はつぎのように定義された  $d \times d$  の小行列である.

$$T_{ij} = \begin{cases} I, & (i=j) \\ -h\beta_{ij}A, & (i > j) \end{cases}$$

$\{k_i\}$  に関する線形方程式 (4) を解くことによって, 各  $n$  ( $\geq 0$ ) と  $k$  ( $0 \leq k \leq m-1$ ) に対する数値解  $y_{n,k}$  が満たすべき漸化式

$$(5) \quad y_{n,k+1} = (I + hH(A; h)A)y_{n,k} + hH(A; h)d_n$$

が得られる. ここで

$$(6) \quad H(A; h) = \sum_{i=1}^s w_i \left( \sum_{j=1}^i B_{ij} \right)$$

なお  $w_i$  は RK 法の重み係数であり,  $B_{ij}$  は係数行列  $T = (T_{ij})$  の逆行列  $T^{-1} = (B_{ij})$  の成分である.  $T^{-1}$  は  $A$  が正則なら常に存在する. また  $S(A; h)$  を

$$S(A; h) = I + hH(A; h)A$$

と定義すれば, この  $S(A; h)$  は線形常微分方程式  $y' = Ay$  に対する RK 公式の増幅行列 (安定関数) となる. したがって  $s$  段  $p$  次の RK 公式では

$$\begin{aligned} S(A; h) &= I + hA + \frac{1}{2}h^2A^2 + \cdots + \frac{1}{p!}h^pA^p \\ &\quad + \frac{\gamma_1}{(p+1)!}h^{p+1}A^{p+1} + \cdots + \frac{\gamma_{s-p}}{s!}h^sA^s \end{aligned}$$

のように展開できる. ここで  $\gamma_i$  は適当な定数である. 例えば 1 段 1 次の Euler 法では

$$S(A; h) = I + hA$$

となり, 3 段 3 次の Heun 法では

$$S(A; h) = I + hA + \frac{1}{2}(hA)^2 + \frac{1}{12}(hA)^3$$

となる.

つぎに, 安定解析において用いる整数点  $t_{n,0}$  上の数値解  $\mathbf{y}_{n,0}$  ( $n \geq 0$ ) が満たすべき漸化式を導出しよう. 先ず, (5) 式から得られる  $\mathbf{y}_{n,i+1}$  ( $i=0, \dots, m-1$ ) を用いて, ベクトル  $\mathbf{y}_{n+1}^T = (\mathbf{y}_{n,1}, \dots, \mathbf{y}_{n,m})$  を定義すれば, (5) 式から

$$(7) \quad U\mathbf{y}_{n+1} = V\mathbf{y}_n + h\hat{\mathbf{d}}_n$$

が得られる. ここで  $1 \leq i, j \leq m$  として

$$U = (U_{ij}), \quad U_{ij} = \begin{cases} I, & (i-j=0) \\ -S, & (i-j=1) \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

但し  $S = S(A; h)$ . また  $H = H(A; h)$  と書いて

$$V = \begin{pmatrix} S+hHA_0 & & \\ 0 & hHA_0 & \\ & \vdots & \\ & hHA_0 & \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{d}}_n = \begin{pmatrix} Hd_n \\ Hd_n \\ \vdots \\ Hd_n \end{pmatrix}$$

ここで定義された  $U, V$  はいずれも  $d$  次小行列を成分にもつ  $m$  次行列 (したがって全体では  $dm \times dm$  行列) である. このとき  $U$  は正則行列であって, その逆が

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} I & & 0 \\ S & I & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ S^{m-1} & \dots & S & I \end{pmatrix}$$

で与えられ, (7) から

$$\mathbf{y}_{n+1} = U^{-1}V\mathbf{y}_n + hU^{-1}\hat{\mathbf{d}}_n$$

が得られる. このとき, このベクトル式の両辺の最後の成分だけを取り出せば

$$\mathbf{y}_{n,m} = S^m \mathbf{y}_{n-1,m} + hP_m H \sum_{q=0}^r A_q \mathbf{y}_{n-q,0}$$

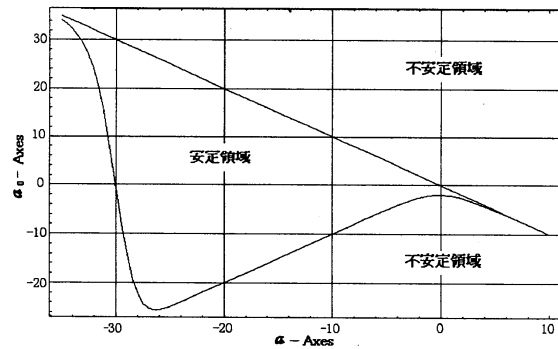


図 3:  $m = 15$  の Heun 法の漸近安定領域

のような漸化式が得られる. ここで

$$P_m = \sum_{j=0}^{m-1} S^j$$

この  $P_m$  は簡単な計算により

$$P_m = (I - S^m)(I - S)^{-1}$$

とまとめられる. 最後に  $\mathbf{y}_{n,0} = \mathbf{y}_{n-1,m}$  の関係に注意すれば,  $\mathbf{y}_{n,0}$  ( $n \geq 0$ ) に対する漸化式

$$\mathbf{y}_{n+1,0} = S^m \mathbf{y}_{n,0} + hP_m H \sum_{q=0}^r A_q \mathbf{y}_{n-q,0}$$

が得られる. さらに  $A$  が正則なら, 関係

$$(I - S)^{-1}H = -\frac{1}{h}A^{-1}$$

が成り立つことから, この漸化式は

$$(8) \quad \mathbf{y}_{n+1,0} = (S^m(I + A^{-1}A_0) - A^{-1}A_0)\mathbf{y}_{n,0} - (I - S^m)A^{-1} \sum_{q=1}^r A_q \mathbf{y}_{n-q,0}$$

のように整理できる.

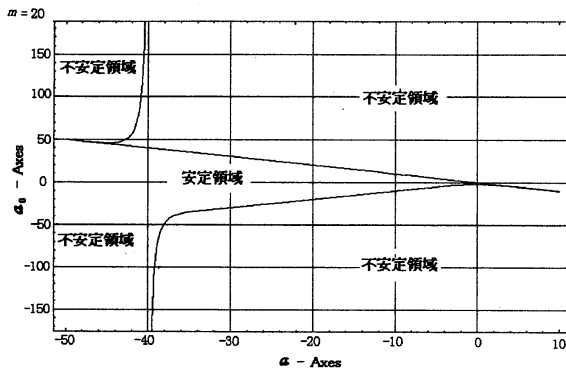
## 5 RK 法の安定性

**定義 5.1** 漸近安定な LDDed に対してゼロに漸近するような数値解法を絶対安定な方法という. ■

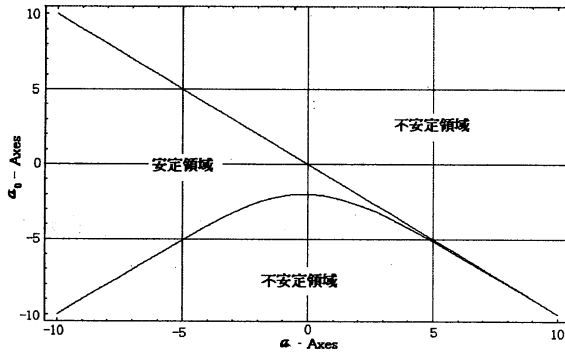
テスト方程式に対する RK 法の安定性は先に導出した漸化式 (8) に随伴する特性多項式

$$\rho_m(z) = \det(z^{r+1}I - (S^m - I)A^{-1}Q_r(z) - S^m z^r)$$

の根の分布に依存する. この特性多項式を用いて, つぎの定理を述べることができる.



(a) 漸近安定領域



(b) 原点付近の拡大図

図 4:  $m = 20$  の Heun 法の漸近安定領域

**定理 5.1** RK 法が絶対安定であるための必要十分条件は漸化式 (8) の特性多項式  $\rho_m(z)$  の根がすべて単位開円板  $D$  に属することである。 ■

理解の助けのために  $y' = ay(t) + a_0 y([t-1])$  に対し、Heun 法が絶対安定であるための  $a$ - $a_0$  領域が図 3 と図 4 に示されている。なお図中では、 $a, a_0$  は  $h$  によって正規化されている。

つぎに行列  $M_m(w)$  を

$$(9) \quad M_m(w) = I - (S^m - I)A^{-1}R_r(w)w - S^m w$$

と定義し、多項式  $\rho_m^c$  を

$$\rho_m^c(w) = \det M_m(w), \quad (w \in \mathbb{C})$$

と定義すれば、 $\rho_m^c(w) = w^{d \times (r+1)} \rho_m(1/w)$  が成立することから、つぎの補題は明らかである。

**補題 5.1** つぎの 3 つの命題は等価である。

- (1)  $\rho_m(z)$  の根が全て  $D$  に含まれる。
- (2)  $\rho_m^c(w)$  のいかなる根も  $D$  に属さない。
- (3) 行列  $M_m(w)$  ( $w \in D$ ) は正則である。 ■

この補題を利用して、つぎの主定理を証明することができる。

**定理 5.2** テスト方程式の係数行列  $A$  は正則とし、そのノルムを  $\alpha = \|A\|$  とする。さらに

$$m_0 = L_1 L_2 (1 + \alpha + \gamma \alpha^2 e^{\gamma \alpha^2}) e^\alpha$$

とする。そのとき  $m > m_0$  なら、刻み幅が  $h = 1/m$  の  $s$  段  $p$  次 RK 法は絶対安定である。ここで

$$\gamma = \sum_{k=2}^p \frac{1}{k!} (h\alpha)^{k-2} + \sum_{k=p+1}^s \frac{|\gamma_{k-p}|}{k!} (h\alpha)^{k-2}$$

$$L_1 = \sup_{w \in D} \|M^{-1}(w)\|$$

$$L_2 = \sup_{w \in D} \|(A^{-1}R_r(w) + I)w\|. \quad \blacksquare$$

## 6 主定理の証明

定理 5.2 の証明に 2 つの補題を用意する。この補題はつぎに定義される行列  $\Gamma_{s,p}$ ,  $\Lambda_m$  の評価に関するものである。

$$(10) \quad \Gamma_{s,p} = \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (I + hA)^{m-j} \left( \sum_{k=2}^p \frac{1}{k!} (hA)^k + \sum_{k=p+1}^s \frac{\gamma_{k-p}}{k!} (hA)^k \right)^j$$

$$(11) \quad \Lambda_m = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^m A^k, \quad C_k^m = \frac{1}{k!} - \frac{1}{m^k} \binom{m}{k}$$

**補題 6.1** テスト方程式の係数行列  $A$  のノルムを  $\alpha = \|A\|$  とする。そのとき  $\Gamma_{s,p}$  に対して、つぎの評価が成立する。

$$\|\Gamma_{s,p}\| \leq \frac{\gamma}{m} \alpha^2 e^{(1+\gamma)\alpha}$$

$$\text{ここで } \gamma = \sum_{k=2}^p \frac{1}{k!} (h\alpha)^{k-2} + \sum_{k=p+1}^s \frac{|\gamma_{k-p}|}{k!} (h\alpha)^{k-2}.$$

**証明**  $\Gamma_{s,p}$  の定義式 (10) を素直に評価して、 $k$  に関する総和内の共通因子  $(h\alpha)^2$  を括りだし後、 $h = 1/m$

とおけば

$$\|\Gamma_{s,p}\| \leq e^\alpha \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \left(\gamma \frac{\alpha^2}{m^2}\right)^j$$

の評価が得られる。さらに不等式

$$\binom{m}{j+1} = \frac{m}{j+1} \binom{m-1}{j} \leq m \binom{m-1}{j}$$

を用いて、評価

$$\|\Gamma_{s,p}\| \leq \frac{\gamma \alpha^2}{m} e^\alpha \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \left(\gamma \frac{\alpha^2}{m^2}\right)^j \leq \frac{\gamma \alpha^2}{m} e^{(1+\gamma\alpha)\alpha}$$

が得られる。■

**補題 6.2**  $m \geq 1$  とし、行列  $A$  のノルムを  $\alpha = \|A\|$  とするとき、 $\Lambda_m$  に対して、つぎの評価が成立する。

$$\|\Lambda_m\| \leq \frac{1}{m} (1+\alpha) e^\alpha$$

**証明**  $\Lambda_m$  の定義式 (11) において与えられた  $C_k^m$  は任意の  $k \geq 0$  に対して  $C_k^m \geq 0$  であって、 $k > m$  のとき  $C_k^m = 1/k!$  することに注意する [3]。これによって評価

$$\|\Lambda_m\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} C_k^m \alpha^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha^k$$

を得る。このとき、右辺の第1項は、 $C_k^m$  が

$$C_k^m = \frac{1}{k!m} \left( m - \frac{1}{m^{k-2}} \frac{(m-1)!}{(m-k)!} \right) \leq \frac{1}{k!m}$$

と評価されることから

$$\sum_{k=0}^m C_k^m \alpha^k \leq \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \alpha^k \leq \frac{1}{m} e^\alpha$$

と評価できる。一方、第2項に対しては

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha^k \leq \frac{1}{m} \alpha e^\alpha, \quad (m \geq 1)$$

したがって、これらの2つの評価を合わせて証明は終わる。■

**定理 5.2 の証明** 定理の証明は補題 5.1 に基づいて行う。すなわち、或る  $m_0$  があって  $m > m_0$  なら任意の  $w \in D$  で  $M_m(w)$  が正則であることを示す。

まず、安定関数  $S = S(A; h)$  の  $m$  乗をつぎのように2つの部分に分けることから始める。

$$S(A; h)^m = (I + hA)^m + \Gamma_{s,p}$$

なお、右辺の  $\Gamma_{s,p}$  は (10) において定義されている。

つぎに、上式の右辺の第1項は (11) 式で定義された  $\Lambda_m$  を用いて

$$(I + hA)^m = e^A - \Lambda_m$$

と表すことができる (これは計算によって確かめられる)。これによって  $S(A; h)$  は

$$S(A; h)^m = e^A - \Lambda_m + \Gamma_{s,p}$$

と表せる。この関係を用いれば  $M_m(w)$  は

$$\begin{aligned} M_m(w) &= M(w) + (\Lambda_m + \Gamma_{s,p})(A^{-1}R_r(w) + I)w \\ &= M(w)(I + W_m(w)) \end{aligned}$$

のように表せる。ここで

$$W_m(w) = M^{-1}(w)(\Lambda_m + \Gamma_{s,p})(A^{-1}R_r(w) + I)w$$

また  $M(w)$  は (3) 式によって定義された行列である。したがって

$$\det M_m(w) = \det M(w) \det(I + W_m(w))$$

が成立する。これによってテスト方程式が漸近安定なら定理 3.2 と補題 3.1 により  $\det M(w) \neq 0$  ( $w \in D$ ) となることから、 $m > m_0$  なら  $W_m(w)$  のノルムが  $\|W_m(w)\| < 1$  ( $w \in D$ ) であることを示せばよい。

$W_m(w)$  のノルムは

$$\|W_m(w)\| \leq L_1(\|\Lambda_m\| + \|\Gamma_{s,p}\|)L_2$$

と評価できる。このとき  $\|\Lambda_m\|$  の評価に補題 6.2 を適用し、 $\|\Gamma_{s,p}\|$  の評価に補題 6.1 を適用すれば、任意の  $w \in D$  に対して

$$\begin{aligned} \|W_m(w)\| &\leq \frac{L_1 L_2}{m} ((1+\alpha)e^\alpha + \gamma \alpha^2 e^{(1+\gamma\alpha)\alpha}) \\ &= \frac{m_0}{m} < 1 \end{aligned}$$

が成立する。したがって  $M_m(w)$  は任意の  $w \in D$  において正則である。■

## 7 精度の数値的検証

RK 法を DDED に適用した際の精度と次数の関係を見るために 2 つの具体例を解く. 一つは線形 DDED であり, 他の一つは非線形 DDED である.

数値例 1 :

$$\begin{cases} y' = -5y(t) + 4y([t]) + 0.005y([t-1]) \\ y(0) = 10, y(-1) = 1, (0 \leq t \leq 15) \end{cases}$$

各種の RK 法の精度を調べるために, この問題に対しては意図的に積分刻み幅を小さく取っている (表 1 参照). 表からはそれぞれ次数に応じた精度が得られている. ■

表 1 数値例 1 の数値解の (相対) 誤差の最大ノルム

方法	誤差 ( $m=20$ )	誤差 ( $m=200$ )
陽的 Euler	1.336 E-02	1.541 E-03
修正 Euler	1.645 E-03	1.329 E-05
最適化 RK	1.645 E-03	1.329 E-05
Heun 法	1.008 E-04	8.315 E-08
NyStröm	1.008 E-04	8.315 E-08
Ralston	1.008 E-04	8.315 E-08
Scraton	1.539 E-06	1.062 E-10

表 2 数値例 2 の数値解の (相対) 誤差の最大ノルム

h	最適化 RK	Ralston	Scraton
$2^{-4}$	4.98 E-01	9.57 E-01	9.10 E-01
$2^{-5}$	1.20 E-01	7.49 E-02	2.62 E-02
$2^{-6}$	2.13 E-02	5.82 E-03	5.73 E-04
$2^{-7}$	3.81 E-03	4.81 E-04	1.67 E-05
$2^{-8}$	7.86 E-04	4.92 E-05	6.70 E-07

数値例 2 :

$$\begin{cases} y' = -y(t)(6y(t) - 5y([t]) - 0.1y([t-1])) \\ y(0)=10, y(-1)=1, (0 \leq t \leq 15) \end{cases}$$

この問題に対しては積分刻み幅を  $h=2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}$  のようにパラメータにとって, 最適化 RK 法と Ralston 法および Scraton 法の 3 種類

の RK 法を適用した. その数値結果が表 2 に示される. 表を見る限りでは, それぞれ方法の次数に対応した精度が得られていると考えられる. なお, 各数値解の誤差評価には  $h=2^{-9}$  をもつ Scraton 法による数値解を用いた. ■

## 8 おわりに

本小文において, 解の導関数に不連続性をもつ常微分方程式 (DDED) の初期値問題に陽的 Runge-Kutta 法を適用する際の数値的安定性について議論した. その議論において, DDED に適用可能な RK 法は陽的 Euler 法, 修正 Euler 法, 最適化 RK 法, Heun 法, NyStröm 法, Ralston 法および Scraton 法に限られること, また, これらの方法は積分の刻み幅を十分小さくすることによって数値的な安定性が保証されることなどの結論を得た. これらの結論は容易に推測されることであるが, これを定理 (定理 6.2) として証明を与えた所に本小文の意義がある.

陰的 RK 法の中にも DDED に適用可能なクラスがある (例えば Legendre-Gauss 型 RK 法). しかし, そのような陰的 RK 法に対する数値的安定性の一般的な考察結果は得ていない.

## 謝辞

数値例の一部は, 本学学部生, 佐野智秀君の卒業研究論文から引用した. 佐野智秀君に対して, ここに感謝の意を表する.

## 参考文献

- [1] 田中正次 : 陽的 Runge-Kutta 法の特性, Vol.1, Vol.2, 山梨大学, 1993.
- [2] J. Wiener : Generalized Solutions of Differential Equations, World Scientific, pp.410, 1993.
- [3] V. I. Arnol'd : Ordinary Differential Equations, Springer Verlag, pp.334, 1992.